VINCENZO FERONE, GUIDO TROMBETTI

Matematica e Ingegneria: convergenze parallele

È ben noto che lo sviluppo iniziale della matematica è legato alle esigenze di amministrazione delle prime forme di società avanzate che si svilupparono tra il quinto e il terzo secolo a.C. intorno ai grandi fiumi in Africa e in Asia. Risultava necessario, ad esempio, costruire argini e dighe, scavare canali, regolare gli approvvigionamenti di acqua, gestire le riserve di cibo. Dell'amministrazione dei lavori pubblici si occupava una burocrazia stabile. Formata da uomini che conoscevano i mutamenti delle stagioni, i moti dei corpi celesti, l'arte di tracciare i confini dei campi e che sapevano come immagazzinare le scorte di cibo e riscuotere le tasse. Tra le innumerevoli conoscenze tecniche accumulate c'era evidentemente l'arte del contare e del misurare. La matematica ebbe quindi origine come scienza pratica. Con lo scopo di facilitare il computo del calendario, l'amministrazione del raccolto, l'organizzazione dei lavori pubblici e la riscossione delle tasse. Inizialmente fu naturalmente data importanza all'aritmetica pratica e alla misurazione. In altri termini, si può dire che la matematica sia nata per risolvere problemi concreti, spesso di carattere ingegneristico.

Già nell'ambito della civiltà greca comincia ad apparire la tendenza all'astrazione. Almeno fino al XIX secolo, sono però innumerevoli gli scienziati che hanno coniugato la capacità di ottenere risultati "astratti" con quella di affrontare e risolvere questioni "pratiche". Ad esempio, Archimede, che visse a Siracusa come consigliere del re Gerone, mise la sua abilità tecnica al servizio della difesa della città dagli attacchi romani. In realtà il suo interesse per le applicazioni suona strano quando lo si confronta con il disprezzo in cui tale interesse era tenuto dalla scuola platonica dei suoi contemporanei. La questione può essere chiarita da un'osservazione che compare nella *Vita Marcelli* di Plutarco:

"*(...) benché tali invenzioni gli abbiano guadagnato la fama di una abilità sovrumana, egli non volle lasciare dietro di sé alcuna opera scritta su tali argomenti, ma, riguardando come ignobile e sordido l'attendere alla meccanica e ad ogni tipo di arte che fosse diretta all'uso e al profitto, mise tutta la sua ambizione in quelle speculazioni la cui bellezza e raffinatezza non sono deturpate da alcuna commistione con i bisogni comuni della vita*".

Archimede si occupò prevalentemente di un settore che oggi chiamiamo calcolo integrale. Ottenne risultati sulle aree delle figure piane e sui volumi dei corpi solidi. E a tali questioni è collegato il famoso "principio di Archimede" che si può trovare nel libro *Galleggianti*, un vero e proprio Trattato di idrostatica. La lista di scienziati, che si occupavano simultaneamente di matematica, filosofia, architettura, ingegneria, musica, pittura, scultura, etc., è enorme. Ad esempio Leonardo da Vinci, per il quale è superfluo dire qualunque cosa; Leon Battista Alberti che, come testimoniano le sue opere, sviluppò la sua architettura su solide basi di geometria; Tartaglia che nella sua *Nuova scienza* discuteva la costruzione di orologi e le traiettorie dei proiettili; Simon Stevin, che si occupò sia di baricentri che di idraulica.

A partire dal XVIII secolo, sia la matematica che l'ingegneria si sono sviluppate in maniera parallela. La matematica progressivamente si è slegata dall'applicazione immediata a problemi concreti. I matematici hanno iniziato a lavorare in campi via via sempre più specialistici. Noi pensiamo a Cauchy come ad un analista, a Cayley come ad un algebrista, a Steiner come ad un geometra e tuttora cataloghiamo ogni matematico in base ai suoi interessi di ricerca. Anche l'evoluzione dell'ingegneria moderna può esser vista come una storia di successive separazioni. Nel Settecento cominciò una distinzione sempre più marcata fra ingegneri militari e ingegneri civili. Con riflessi anche sulla struttura delle scuole di ingegneria che allora cominciavano ad apparire. Nell'Ottocento gli ingegneri civili (edili, idraulici, di ponti e strade) cominciarono a separarsi dagli ingegneri industriali. Più di recente perfino l'organizzazione ufficiale italiana degli studi di ingegneria ha riconosciuto l'opportunità di articolare gli studi in tre settori. Ingegneria civile. Ingegneria industriale. Ingegneria dell'informazione.

Questa tendenza di matematici e ingegneri a perseguire specializzazioni sempre più estreme ha prodotto, talvolta, fenomeni di incomunicabilità. Una sorta di sindrome da "separati in casa". Spesso i matematici ritengono che molti problemi concreti si risolvono "applicando" opportunamente teorie generali. Si concentrano pertanto sullo sviluppo di tali teorie piuttosto che sulle difficoltà delle applicazioni. D'altra parte talvolta gli ingegneri, pur riconoscendo l'utilità e il valore delle teorie generali, le considerano più che altro un lusso intellettuale. In altri termini, ritengono che la speculazione astratta fornisca solo un quadro più elegante alla soluzione, senza contribuire in modo più efficace alla soluzione dei problemi concreti. Ovviamente qui si procede con l'accetta. Non si può sostenere che tutti i matematici e tutti gli ingegneri siano inquadrabili nelle brevi descrizioni appena esposte. È però illuminante ricordare alcune opinioni autorevoli.

Neunzert [N] riporta che nel 1832 un non meglio identificato ingegnere inglese affermava: "*La stabilità di un edificio è inversamente proporzionale al sapere matematico del suo costruttore*". Poincaré [P] nel 1909 scriveva: "*Talvolta riusciamo solo a dimostrare le possibilità di un problema. Allora l'ingegnere trova che ciò è ridicolo e con ragione. Non ha molto interesse sapere quello che sarà utile all'ingegnere del*

XXII secolo; noi, d'altra parte, pensiamo altrimenti e siamo talvolta più lieti d'aver risparmiato un giorno di lavoro i nostri pronipoti che un'ora ai nostri contemporanei".

Può apparire stupefacente che un momento cruciale nello sviluppo dell'ingegneria sia legato anche all'azione di un matematico: Gaspard Monge. Infatti, con un decreto della Convenzione (ormai termidoriana) del 1794, viene istituita l'Ecole Centrale des Travaux Public, che l'anno dopo sarebbe divenuta l'Ecole Polytechnique. Tra i fondatori di tale istituzione ci fu proprio Monge. Egli, con la collaborazione di altri illustri scienziati, ne fissò l'ordinamento degli studi. La sua idea fondamentale era che una sola teoria costituisce la base delle diverse applicazioni in cui si articola l'attività dell'ingegnere. Non era pertanto ammissibile che ogni singola Scuola di Applicazione, di carattere particolare, esaurisse in sé l'intero arco di insegnamento, includente la teoria e le sue applicazioni. Al contrario il biennio preparatorio doveva fornire per tutte le diverse scuole di applicazione le conoscenze di base. Tali conoscenze erano di due tipi: quelle che dipendono dalle matematiche, necessarie per studiare la forma ed il movimento dei corpi, e quelle che dipendono dalla fisica (intesa in senso lato), necessarie per studiare l'essenza dei corpi ed i fenomeni che in essi hanno luogo. Molto probabilmente è a queste idee che bisogna risalire per comprendere perché per due secoli, nel campo dell'ingegneria, l'approfondimento della teoria ha preceduto lo studio delle applicazioni (oggi è ancora così?). Questa priorità della teoria rispetto alle applicazioni ha certo un suo indubbio fondamento sul piano logico ed anche, probabilmente, su quello didattico. È evidente che non sempre essa si manifesta anche nell'ordine storico. Un esempio classico è quello della macchina a vapore che si è diffusa prima della formulazione teorica della termodinamica ed anzi ne ha stimolato la nascita.

Sembra opportuno a questo punto fornire qualche informazione a proposito di Gaspard Monge (1746-1818). Egli fu quasi contemporaneo di Gauss, probabilmente l'ultima figura di matematico a padroneggiare con grande versatilità la matematica pura e applicata. Gauss arrivò a collaborare con Weber nell'invenzione del telegrafo elettrico. Monge invece fu uno dei primi matematici moderni. Lo possiamo ritenere uno specialista. Un geometra. Anche il suo modo di trattare le equazioni alle derivate parziali ha chiaramente un'impronta geometrica. Monge aveva iniziato la sua carriera come docente all'accademia di Meziéres. Lì le lezioni sulle fortificazioni gli fornirono l'occasione per sviluppare la geometria descrittiva come branca della geometria. Le sue lezioni furono pubblicate nella *Géométrie descriptive*. A Meziéres incominciò anche ad applicare il calcolo infinitesimale a curve e superfici nello spazio. I suoi lavori sull'argomento furono pubblicati nella *Application de l'analyse à la gométrie* che può essere considerato il primo libro di geometria differenziale. Grazie all'influenza di Monge si cominciò a coltivare la geometria all'Ècole Polytechnique. Nella geometria descrittiva di Monge risiedeva il nocciolo della geometria proiettiva. La sua completa padronanza nell'applicare metodi algebrici e analitici a curve e superfici contribuì in grande misura allo sviluppo della geometria analitica e differenziale. Sebbene Monge fosse un uomo di saldi principi democratici, si mantenne fedele a Napoleone e, nel 1815, quando ritornarono al potere i Borbone, Monge perse la sua posizione. Poco dopo morì. Tuttavia l'Ècole Polytechnique continuò a fiorire secondo l'impronta originaria di Monge. Tra gli altri, furono docenti o studenti presso l'Ècole, Joseph Louis Lagrange, Victor Poncelet, Augustin Fresnel, André Marie Ampère, Charles Dupin, Siméon Poisson, Joseph Fourier, Augustin Cauchy. Probabilmente la figura di Cauchy è quella che meglio mette in evidenza il ruolo importante che ha avuto (ed ancora oggi ha) l'Ècole Polytechnique per lo sviluppo della matematica. Egli frequentò l'Ècole conseguendo il grado di ingegnere nel 1809 e ottenendo l'anno successivo un posto presso il porto di Cherbourg. Si fece apprezzare per le sue qualità tecniche, ma il suo interesse più vivo era rivolto alla scienza pura. Proprio le solide basi acquisite presso l'Ècole gli consentirono di mettere in evidenza le sue straordinarie doti di matematico. Dopo la restaurazione, nel 1816, Cauchy fu nominato membro della sezione di meccanica dell'Accademie des Sciences, in uno dei due posti resi vacanti in seguito alla rimozione di Carnot e Monge. Nello stesso periodo fu chiamato ad insegnare anche presso l'Ècole Polytechnique.

Come già accennato, il nome di Monge è legato a varie questioni di interesse matematico originate da problemi legati all'ingegneria. Qui ci concentreremo sui suoi contributi alla geometria descrittiva e ai problemi di trasporto ottimo. Monge è considerato l'iniziatore della geometria pura moderna. Il suo insegnamento presso l'Ècole Politechnique non solo formò generazioni di ingegneri, ma stimolò anche la rinascita della geometria sintetica che poi si sviluppò in maniera straordinaria nell'Ottocento. A tale proposito risulta molto interessante mettere in evidenza l'approccio "geometrico" di Monge alla risoluzione di problemi apparentemente complicati. Richiamiamo, ad esempio, la dimostrazione che egli propone del seguente teorema:

Tre cerchi qualunque del piano, considerati a due a due, hanno le tangenti comuni che si incontrano in tre punti allineati.

Facendo riferimento alla figura 1, il teorema stabilisce che i punti *A, B, C* sono allineati, qualunque sia la posizione dei tre cerchi. La dimostrazione di questa proprietà risulta particolarmente semplice se si considera il problema nello spazio, cioè se, invece dei cerchi, si considerano delle sfere e, invece delle intersezioni delle tangenti comuni a due cerchi, si considerano i vertici dei coni tangenti a due sfere. In altre parole, basta provare che:

Tre sfere qualunque dello spazio, considerate a due a due, hanno i vertici dei coni tangenti allineati.

Questa proprietà risulta assolutamente evidente non appena si osserva che i vertici dei coni tangenti giacciono sull'intersezione (che è una retta) dei due piani costruiti in maniera che siano tangenti alle tre sfere e che ciascuno lasci le sfere in uno stesso semispazio.

Ma, probabilmente, i contributi di Monge più importanti sono legati al problema della rappresentazione degli oggetti tridimensionali per mezzo di disegni bidimensionali. Tra il 1768 il 1818 egli si dedicò a tale questione e il suo metodo della doppia proiezione con ribaltamento rimase a lungo segreto militare poiché era utilizzato nella progettazione di fortificazioni. Nell'opera *Géométrie descriptive* egli fonda la geometria descrittiva e pone le basi per gli sviluppi ulteriori della geometria proiettiva legati anche alla figura di un suo allievo diretto: Jean Victor Poncelet.

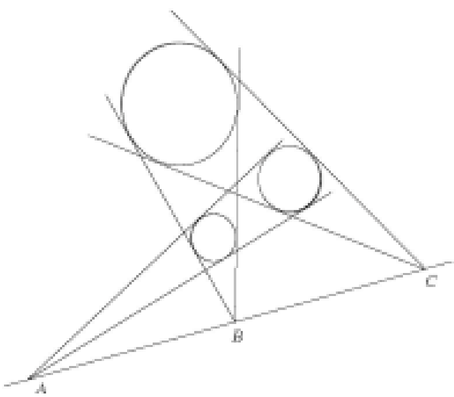

Fig. 1

La questione che non era stata ancora completamente chiarita riguardava la possibilità di descrivere in maniera completa ed esaustiva un oggetto reale facendo uso delle proiezioni. La dimostrazione del fatto che si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'oggetto e il disegno è stata, nella sostanza, la svolta che ha aperto orizzonti inesplorati nel campo della geometria descrittiva. La geometria descrittiva può essere vista come un caso particolare della geometria proiettiva, che studia le proprietà delle figure che rimangono invariate sotto l'operazione di proiezione. Ad esempio, una proiezione centrale conserva l'allineamento dei punti, cioè se tre punti sono allineati, allora anche le loro proiezioni lo sono (vedi Fig. 2). La proiezione parallela, in più, conserva anche il parallelismo delle rette (vedi Fig. 3).

Gaspard Monge usò proprio quest'ultimo tipo di proiezione poichè è un caso in cui le proprietà invarianti sono tali da assicurare che la proiezione descrive compiutamente l'oggetto rappresentato e le relazioni tra le sue parti. Il metodo della doppia proiezione con ribaltamento può essere descritto brevemente come segue (vedi Fig. 4):

a) si scelgono due piani ortogonali che dividono lo spazio in quattro diedri e si intersecano lungo una retta r detta linea di terra;

b) posto l'oggetto da rappresentare in un diedro, se ne effettuano due proiezioni ortogonali, una su ciascun piano;

c) si ribalta il semipiano verticale in modo che diventi parallelo a quello oriz-

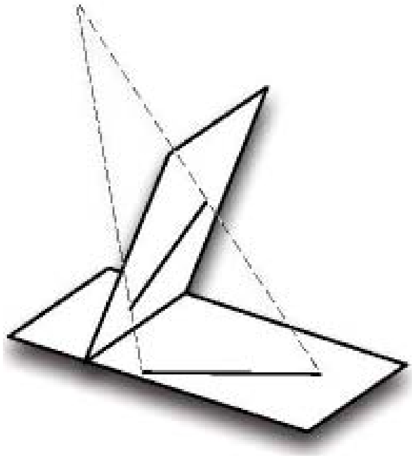

Fig. 2

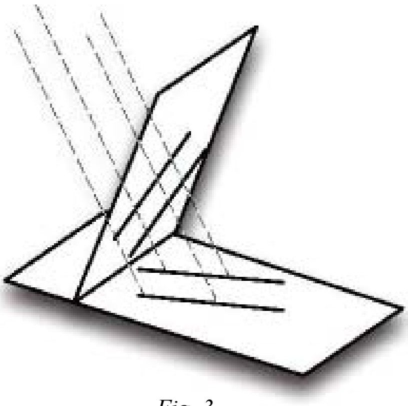

Fig. 3

zontale, ottenendo due proiezioni separate dalla linea di terra.

Il disegno così ottenuto ha la proprietà che ogni punto P dell'oggetto nello spazio ha le coordinate uguali alla distanza dalla retta *r* di opportuni punti P' e P'' presi sulle proiezioni, che si trovano sulla stessa perpendicolare a *r*. In questo modo possibile risalire dalla proiezione, cioè dal disegno, all'oggetto rappresentato.

Come già detto, Gaspard Monge, nella sua *Mémoire sur la théorie des Déblais et des remblais* apparsa nel 1781, diede anche origine ad una problematica, nota come trasporto di massa ottimale. Essa è diventata nel tempo un argomento classico in teoria della probabilità, in economia e in ottimizzazione. Per capire la portata del problema introdotto da Monge è interessante osservare due cose: in primo luogo, solo negli ultimi venti anni è stato possibile dare una risposta soddisfacente dal punto di vista matematico al problema posto da Monge in un ambito abbastanza generale; in secondo luogo, una forma semplificata del problema originale fu studiata da L.V. Kantorovich negli anni '40 e, per risultati ottenuti in economia e collegati a detto problema, il matematico russo ottenne il Premio Nobel nel 1975.

Una breve descrizione del problema può essere data come segue. Supponiamo di avere un certa quantità di sabbia ed una buca che vogliamo riempire completamente con la sabbia. Ovviamente la sabbia e la buca devono avere lo stesso volume, che, per semplicità, si può porre uguale a uno. Se si denota con x il generico punto in cui si trova la sabbia e con y il generico punto in cui si trova la buca, si introduce una funzione costo $c(x,y)$ che quantifica il costo necessario per trasportare un'unità di massa da x a y. La questione da risolvere è la seguente: come si realizza il trasporto al costo più basso? Chiaramente questo stesso problema può essere posto in varie ma-

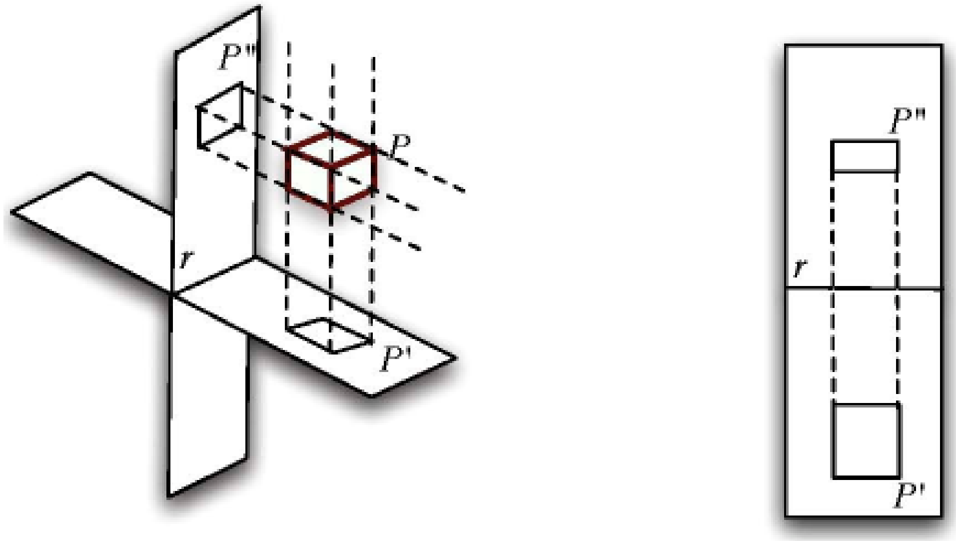

Fig. 4

niere. Ad esempio, si può pensare di avere una certa distribuzione di miniere ed una distribuzione di industrie che devono essere rifornite di ferro. La funzione costo sarà quindi quella relativa al trasporto di ferro dalla miniera *x* alla fabbrica *y*. Svariate altre formulazioni del problema possono essere proposte e va sottolineato che hanno avuto un enorme sviluppo quelle proposte in ambito probabilistico.

Se si torna alla formulazione iniziale che riguarda il trasporto di massa, il caso probabilmente più semplice ed intuitivamente chiaro è quello relativo alla situazione in cui la massa da trasportare è concentrata in un certo numero di punti, diciamo *k*, in ciascuno dei quali è concentrata una massa *1/k*; chiamiamo questi punti $\{x_1,...,x_k\}$ Si vuole trasportare tale massa in k punti $\{y_1,...,y_k\}$ in ciascuno dei quali si vuole concentrare una massa pari a *1/k*. In questo caso bisogna minimizzare la quantità

$$(1) \qquad \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} c(x_i, y_{\sigma(i)}),$$

al variare di *ó(i)* dove *ó(i)* è la generica permutazione dei primi *k* interi. In altri termini si minimizza la somma dei costi di trasporto dalla generica posizione x_i alla generica posizione y_j sotto il vincolo di considerare (una ed una sola volta) tutti i punti di partenza e tutti i punti di arrivo. Il problema diventa un problema di minimizzazione lineare e sono da tempo ben noti risultati che assicurano l'esistenza della trasformazione che realizza il trasporto ottimo, cioè della funzione $y = T(x)$ che fornisce le coppie $(xi,y_{ó(i)}) = (xi,T(xi))$ in maniera che la somma (1) sia minima.

Quando la massa da trasportare non è necessariamente concentrata in un numero discreto di punti, ma è dislocata secondo una certa distribuzione di massa f(x) definita su un insieme X, si tratta di minimizzare una quantità del tipo:

(2) $$J[T] = \int_X c(x, T(x))\, f(x)\, dx,$$

al variare di tutte le trasformazioni *y = T (x)* che “trasportano” la massa dalla posizione iniziale in una certa distribuzione finale che può essere descritta da una distribuzione di massa *g(x)* definita su un altro insieme *Y* (vedi Fig. 5).

La condizione di invarianza della massa diventa:

(3) $$\int_X f(x)\, dx = \int_Y g(y)\, dy = 1,$$

ma il vincolo da porre sulla funzione *T(x)* diventa molto difficile da trattare, in quanto risulta essere fortemente non lineare. Per questa ragione, solo nel 1979 V. Sudakov [Su] fornì una dimostrazione dell’esistenza del minimo per il funzionale (2) in una situazione abbastanza generale. Tra parentesi va sottolineato che la dimostrazione di Sudakov conteneva qualche imprecisione e che la prima dimostrazione corretta appare nel 1999 ad opera di Evans e Gangbo [EG].

Quando si parla di minimo per il funzionale (2) si intende dire che esiste una funzione *y = T(x)* in corrispondenza della quale J[T] assume il suo valore più piccolo. Va osservato che, in situazioni più generali di quelle in cui ci siamo messi, si possono fare esempi nei quali il funzionale analogo a quello in (2) non ammette minimo, ma solo estremo inferiore. Infine, una breve osservazione sul vincolo che deve essere soddisfatto dalla funzione *T(x)* in (2). Esso è collegato all’invarianza della massa data dalla condizione (3) e, quando *T(x)* è una funzione regolare, si può scrivere nella forma:

$$f(x) = g(T(x))|\det \nabla T(x)|.$$

Non dovrebbe essere difficile riconoscere che l’uguaglianza precedente proviene dalla formula di cambio di variabili negli integrali multipli.

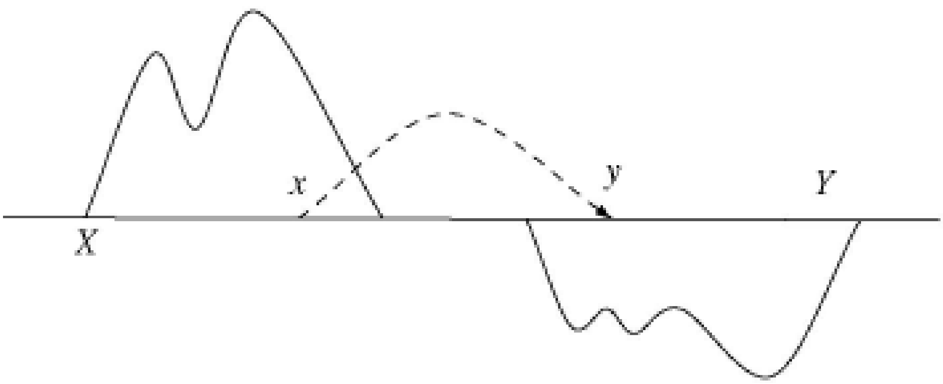

Fig. 5

Bibliografia

[EG] L.C. Evans W. Gangbo, "*Differential equations methods for the MongeKantorovich mass transfer problem*", Mem. Amer. Math. Soc. 137 (1999), n. 653.

[N] H. Neunzert (ed.), *Proceedings of the conference "Mathematics in industry"*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1984.

[P] H. Poincaré, *Atti del IV Congresso Internazionale di Matematica*, Accademia dei Lincei, Roma, 1909.

[RM] P. Renno, A. Maio (a cura di), *Atti del Convegno "Insegnamento e ricerca matematica nelle facoltà di ingegneria*", Notiziario dell U.M.I., Supplemento al n.1 (1986).

[St] D.J. Struik, *Matematica: un profilo storico*, Universale Paperbacks il Mulino, Bologna, 1981.

[Su] V.N. Sudakov, "*Geometric problems in the theory of infinitedimensional probability distributions*", Proc. Steklov Inst. Math. 141 (1979), 1–178.

[Vi] C. Villani, T*opics in optimal transportation, Graduate Studies in Mathematics*, 58, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.